דף תרגילים מס' 7 – טורי פורייה מרוכבים

תרגיל 7.1 מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $y = x$:

(א) בקטע $(-\pi,\pi)$. **(ב)** בקטע $(-2\pi,2\pi)$.

תרגיל 7.2

(א) פתחו את הפונקציה $y = e^x$ לטור פורייה מרוכב בקטע $x \in (-2,2)$.

(ב) על סמך הסעיף הקודם מצאו טור פורייה טריגונומטרי של $y = e^x$ באותו הקטע.

(ג) ציירו את גרף הפונקציה אליה מתכנסים הטורים שמצאתם.

תרגיל 7.3 פתחו את הפונקציה $y = 3\cos x - 2\sin(5x)$ לטור פורייה מרוכב בקטע $x \in (-\pi,\pi)$.

תרגיל 7.4 נתונה הפונקציה המחזורית: $\begin{cases} y(x) = -x, & -2 \le x < 2 \\ y(x+4) = y(x), & \forall x \end{cases}$.

(א) מצאו את המחזור היסודי של הפונקציה.

(ב) האם $T_2 = 64$ הוא גם מחזור הפונקציה?

(ג) בטאו את הפונקציה $y(x)$ באמצעות משוואה מפורשת בקטע $6 \le x < 10$.

(ד) בטאו את הפונקציה $y(x)$ באמצעות משוואה מפורשת בקטע $-14 \le x < -10$.

תרגיל 7.5 בדף התרגילים קודם, פיתחנו את הפונקציה $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ לטור פורייה טריגונומטרי בקטע $-\pi \le x \le \pi$ וקיבלנו: $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)\right)$.

השתמשו בתוצאה זו כדי לקבל את הביטוי לטור פורייה מרוכב עבור פונקציה זו.

תרגיל 7.6 באמצעות טור פורייה מתאים חשבו את הסכום של הטורים המספריים הבאים:
(אפשר להשתמש בתוצאות לגבי פיתוחי פורייה מדף התרגיל הקודם)

(א) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

(ב) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

(ג) $1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

תרגיל 7.7 נתונה הפונקציה $f(x)=x(\pi-x)$ בקטע $[0,\pi]$.

(א) פתחו את f לטור סינוסים ב-$[-\pi,\pi]$.

(ב) הראו ש-$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$.

(ג) הוכיחו כי $\frac{\pi^3}{32}=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots$.

תרגיל 7.8

חשבו את האינטגרל $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{2^n}\right|^2 dx$.